

**Mathematik – Koordinatensystem
 Lineare Funktion**

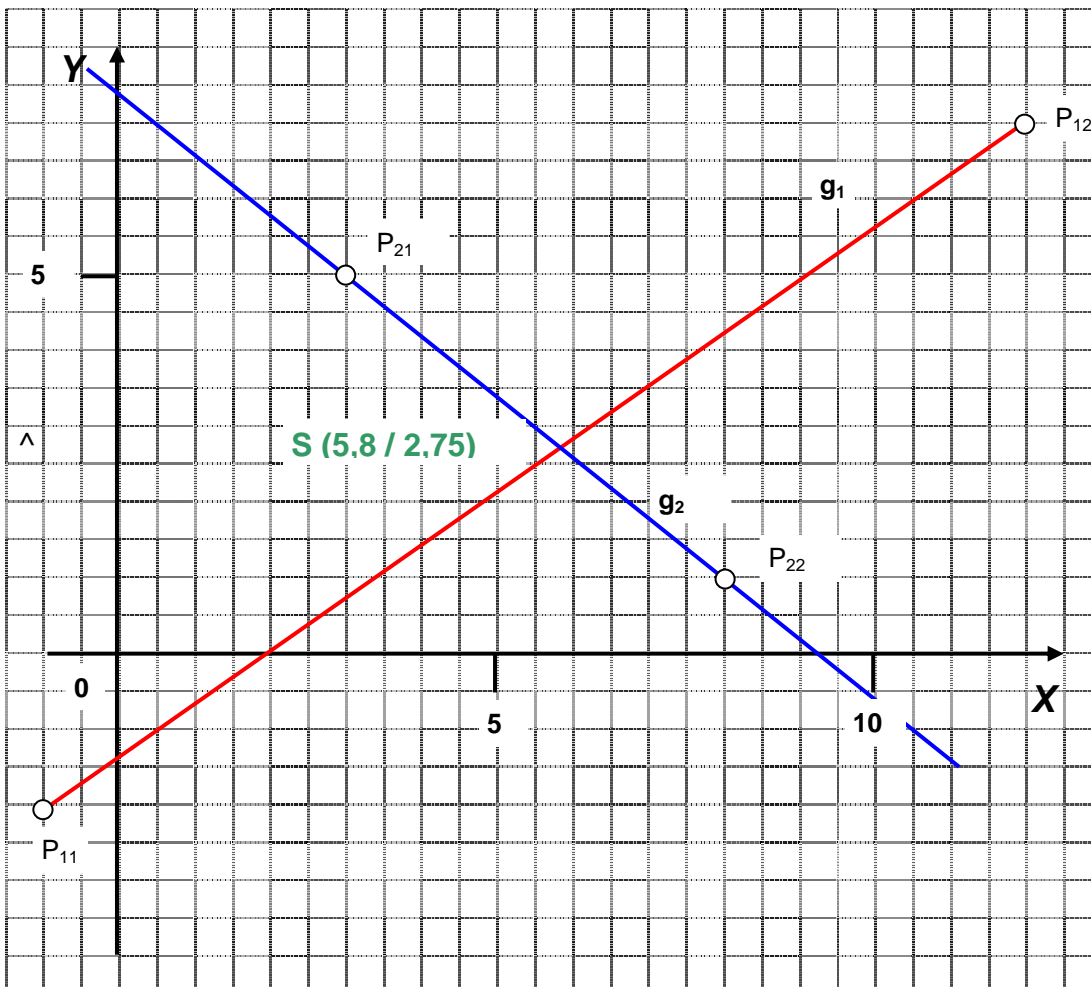
Für zwei Geraden, für die jeweils zwei Koordinatenpunkte bekannt sind, soll der Schnittpunkt bestimmt werden.

Tabelle: Koordinatenpunkte für 2 Geraden

Gerade g_1	Punkt $P_{11}(-1 -2)$		Punkt $P_{12}(12 7)$	
	X_{P11}	Y_{P11}	X_{P12}	Y_{P12}
	-1	-2	12	7
Gerade g_2	Punkt $P_{21}(3 6)$		Punkt $P_{22}(8 1)$	
	X_{P21}	Y_{P21}	X_{P22}	Y_{P22}
	3	5	8	1

Aufgabe 1

Tragen Sie die Punkte in das Koordinatensystem ein und zeichnen Sie die Geraden g_1 und g_2 .



Aufgabe 2

Markieren Sie den Schnittpunkt S (Kreuzungspunkt) der beiden Geraden und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.

Aufgabe 3

Die allgemeine Funktionsgleichung für eine Gerade lautet

$$y = m x + b$$

mit

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{Steigung der Geraden gegenüber der X-Achse}$$

b y-Wert des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse.

Berechnen Sie die Steigung der beiden Geraden und deren Schnittpunkte mit der Y-Achse. Geben Sie die Funktionsgleichungen der beiden Geraden an.

	Gerade g_1	Gerade g_2
Steigung m lässt sich berechnen, wenn zwei Koordinatenpunkte der Geraden bekannt sind.	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $m_1 = \frac{y_{P12} - y_{P11}}{x_{P12} - x_{P11}}$ $= \frac{7 - (-2)}{12 - (-1)} = \frac{7 + 2}{12 - 1}$ $= \frac{9}{13}$	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $m_2 = \frac{y_{P22} - y_{P21}}{x_{P22} - x_{P21}}$ $= \frac{1 - 5}{8 - 3} = \frac{-4}{5}$ $= -\frac{4}{5}$
Achsenabschnitt b lässt sich berechnen, wenn die Steigung m und ein Koordinatenpunkt der Geraden bekannt sind.	$y = m \cdot x + b$ $m \cdot x + b = y$ $b = y - m \cdot x$ $b_1 = y_{P12} - m_1 \cdot x_{P12}$ $= 7 - \frac{9}{13} \cdot 12$ $= -\frac{17}{13}$	$y = m \cdot x + b$ $m \cdot x + b = y$ $b = y - m \cdot x$ $b_2 = y_{P22} - m_2 \cdot x_{P22}$ $= 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot 8 = 1 + \frac{4}{5} \cdot 8$ $= 7\frac{2}{5}$
Funktionsgleichung	$y_1 = \frac{9}{13} \cdot x - \frac{17}{13}$ $y_1 = 0,69230... \cdot x - 1,30769...$	$y_2 = -\frac{4}{5} \cdot x + 7\frac{2}{5}$ $y_2 = -0,8 \cdot x + 7,4$

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Lösungshinweis:

Der Schnittpunkt S liegt auf beiden Geraden. Das heißt: **Einsetzen von Punkt S in die Funktionsgleichungen liefert ein Gleichungssystem (GLS):**

GLS	①	$y_S = \frac{9}{13} \cdot x_S - \frac{17}{13}$
	②	$y_S = -\frac{4}{5} \cdot x_S + 7\frac{2}{5}$

Das GLS besteht aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Da auf der linken Seite jeweils der gleiche Term (y_S) steht, löst man es über das **Gleichsetzungsverfahren:**

$$\textcircled{1} = \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{13} \cdot x_S - \frac{17}{13} &= -\frac{4}{5} \cdot x_S + 7\frac{2}{5} \\ \frac{9}{13} \cdot x_S + \frac{4}{5} \cdot x_S &= 7\frac{2}{5} + \frac{17}{13} \\ \frac{97}{65} \cdot x_S &= \frac{566}{65} \\ x_S &= \frac{566}{65} : \frac{97}{65} = \frac{566}{65} \cdot \frac{65}{97} \\ &= \frac{566}{97} = 5\frac{81}{97} = 5,83505\dots \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Wertes x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen ergibt den y-Wert für den Schnittpunkt S (hier gewählt ①)

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{9}{13} \cdot x_S - \frac{17}{13} \\ &= \frac{9}{13} \cdot \frac{566}{97} - \frac{17}{13} \\ &= \frac{265}{97} = 2\frac{71}{97} = 2,73195\dots \end{aligned}$$

Aufgabe 5

In einer Formelsammlung zur Mathematik finden Sie für die Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden folgende Darstellung:

$$S\left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}; m_{1(2)} \cdot \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_{1(2)}\right) \text{ mit } m_1 \neq m_2$$

Überprüfen Sie diese Angabe!

Lösung:

$$\begin{aligned}
 m_1 \cdot x + b_1 &= m_2 \cdot x + b_2 \\
 m_1 \cdot x - m_2 \cdot x &= b_2 - b_1 \\
 x \cdot (m_1 - m_2) &= b_2 - b_1 \\
 x_S &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\
 \\
 y_S &= m_1 \cdot x_S + b_1 \\
 &= m_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1 \\
 &\quad b_{\text{zW.}} \\
 y_S &= m_2 \cdot x_S + b_2 \\
 &= m_2 \cdot \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_2
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen und/oder Schnittpunkte für die folgenden Geraden:

6.1	<p>Gegeben: Gerade g_1: $P_{11}(1 \mid -1)$; $P_{12}(9 \mid 5)$ Gerade g_2: $P_{21}(0 \mid 7)$; $P_{22}(9 \mid 0)$ Gesucht:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Funktionsgleichungen für g_1 und g_2 - Schnittpunkt S der beiden Geraden
	<p>Lösung</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Gerade g_1</p> $\begin{aligned} m_1 &= \frac{y_{P12} - y_{P11}}{x_{P12} - x_{P11}} \\ &= \frac{5 - (-1)}{9 - 1} = \frac{5 + 1}{8} = \frac{6}{8} \\ &= \frac{3}{4} \\ b_1 &= y_{P12} - m_1 \cdot x_{P12} \\ &= 5 - \frac{3}{4} \cdot 9 \\ &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$ </div> <div style="width: 45%; border-left: 1px dashed black; padding-left: 10px;"> <p>Gerade g_2</p> $\begin{aligned} m_2 &= \frac{y_{P22} - y_{P21}}{x_{P22} - x_{P21}} \\ &= \frac{0 - 7}{9 - 0} = \frac{-7}{9} \\ &= -\frac{7}{9} \\ b_2 &= y_{P22} - m_2 \cdot x_{P22} \\ &= 0 - \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot 9 = 0 + 9 \\ &= 9 \end{aligned}$ </div> </div>

Funktionsgleichungen der beiden Geraden:

Gerade g_1 $y_1 = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{7}{4}$

Gerade g_2 $y_2 = -\frac{7}{9} \cdot x + 9$

Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$y_1 = y_2$$

$$\frac{3}{4} \cdot x_S - \frac{7}{4} = -\frac{7}{9} \cdot x_S + 9$$

$$\frac{3}{4} \cdot x_S + \frac{7}{9} \cdot x_S = 9 + \frac{7}{4}$$

$$\frac{55}{36} x_S = \frac{43}{4}$$

$$x_S = \frac{43}{4} \cdot \frac{36}{55} = \frac{387}{55}$$

$$= \underline{\underline{7,036}}$$

$$y_S = \frac{3}{4} \cdot x_S - \frac{7}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{387}{55} - \frac{7}{4} = \frac{194}{55}$$

$$= \underline{\underline{3,527}}$$

S (7,0364 / 3,5273)

6.2 **Gegeben:**

Funktionsgleichungen

$$y_1 = 3x + 2$$

$$y_2 = -3x + 7$$

Gesucht:

- Schnittpunkt S der beiden Geraden

Lösung:

$$y_1 = y_2$$

$$3 \cdot x_S + 2 = -3 \cdot x_S + 7$$

$$3 \cdot x_S + 3 \cdot x_S = 7 - 2$$

$$6 \cdot x_S = 5$$

$$x_S = \frac{5}{6}$$

$$= \underline{\underline{0,83}}$$

$$y_S = 3 \cdot x_S + 2 = 3 \cdot \frac{5}{6} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$= \underline{\underline{4,5}}$$

S (0,8333 / 4,5)

6.3 Gegeben:

Auf einer Probefahrt eines Schiffsneubaus wurden folgende Messwerte aufgenommen, nach dem das Schiff seine Höchstgeschwindigkeit erreicht hatte:

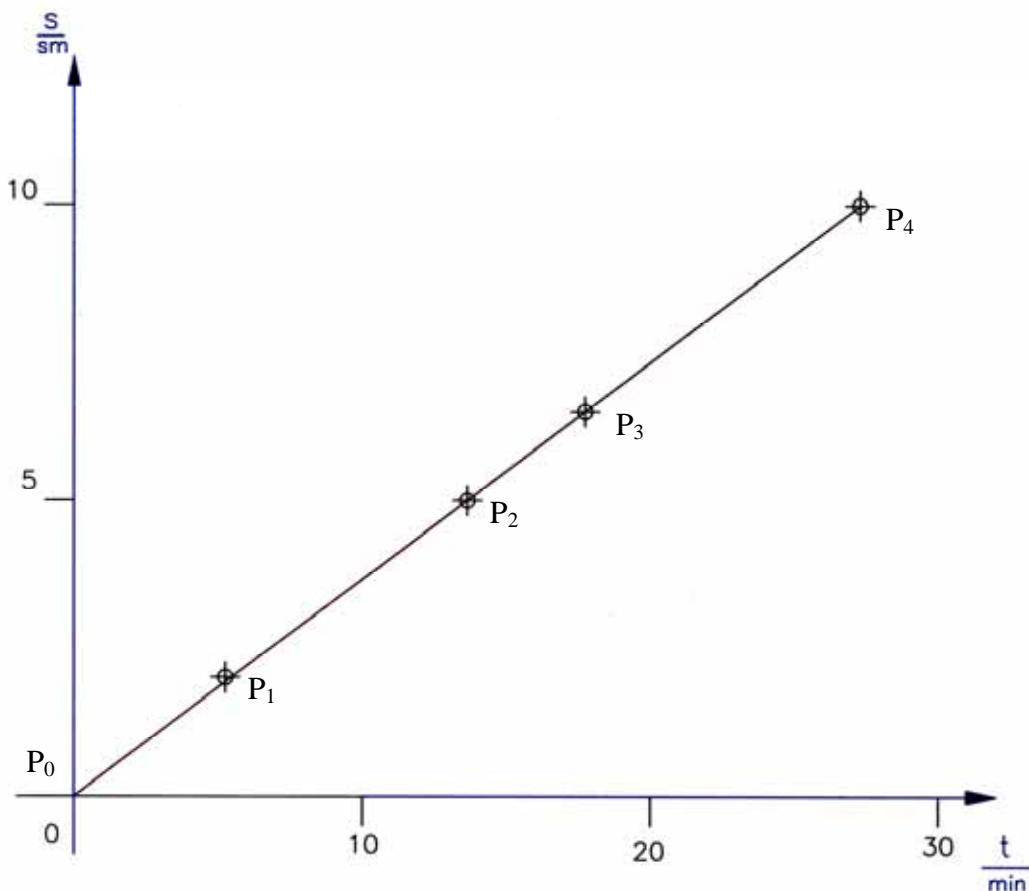
Fahrtstrecke s in sm	0	2	5	6,5	10
Fahrtzeit t in min	0	5,45	13,64	17,73	27,27

Aufgaben:

1. Stellen Sie die folgenden Messwerte grafisch in einem s - t -Diagramm dar :

Waagerechte Achse	Zeit t in s	10 mm \triangleq 2 min
Senkrechte Achse	Strecke s in sm	10 mm \triangleq 1 sm

- Prüfen Sie, ob die Messwerte auf einer Geraden liegen oder im Idealfall auf einer Gerade liegen könnten.
- Wie lautet die Funktionsgleichung für die Gerade?
- Mit welcher Geschwindigkeit v in kn fuhr das Schiff?
- Werten Sie die Daten mit Hilfe der „Linearen Regression“ aus (vgl. dazu Taschenrechner, Datenauswertung mit Excel).

6.3.1 s - t -Diagramm


	<p>6.3.2</p> <p>Die Punkte liegen bei einer geringen Abweichung des Punktes (5,45 min / 2 sm) sehr genau auf einer durch den Koordinatenursprung verlaufenden ansteigenden Geraden.</p>
	<p>6.3.3</p> <p>Wir übertragen die Funktionsgleichung einer Geraden $f(x) = mx + b$ auf das vorliegende Koordinatensystem. Die waagerechte X-Achse ist jetzt die Zeitachse (t-Achse) und die senkrechte -Achse die Wegachse (s-Achse). Die Steigung $m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ wird jetzt durch den Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ersetzt. Da die vorliegende Gerade durch den Nullpunkt geht, ist $b = 0$. Wir erhalten:</p> $f(t) = \frac{s_4 - s_0}{t_4 - t_0} \cdot t + 0$ $= \frac{10 \text{ sm} - 0 \text{ sm}}{27,27 \text{ min} - 0 \text{ min}} \cdot t = \frac{10 \text{ sm}}{27,27 \text{ min}} \cdot t = 0,36670... \frac{\text{sm}}{\text{min}} \cdot t$ $\approx \underline{\underline{0,3677 \frac{\text{sm}}{\text{min}}} \cdot t}$ <p>Statt $f(t)$ wird in der Technik das Formelzeichen für den Weg s benutzt. Die Größe für die Steigung hat die Einheit der Geschwindigkeit und so wird statt m für die Steigung das Formelzeichen für die Geschwindigkeit v verwendet.</p> <p>Für die Gerade im s-t-Diagramm ergibt sich somit</p> $s = v \cdot t$ $= 0,3677 \frac{\text{sm}}{\text{min}} \cdot t$
	<p>6.3.4</p> <p>In der Seefahrt wird die Geschwindigkeit in der Regel in kn (Knoten) angegeben. Es gilt: $1 \text{ kn} = 1 \frac{\text{sm}}{\text{h}}$.</p> <p>Für unser Schiff ergibt sich nun:</p> $v = 0,3667 \frac{\text{sm}}{\text{min}} = 0,3667 \frac{\text{sm}}{\frac{1}{60} \text{ h}}$ $= 22,002 \frac{\text{sm}}{\text{h}}$ $\approx \underline{\underline{22,002 \text{ kn}}}$

6.3.5

Auswertung der Messwertetabelle mit Excel (Lineare Regression):

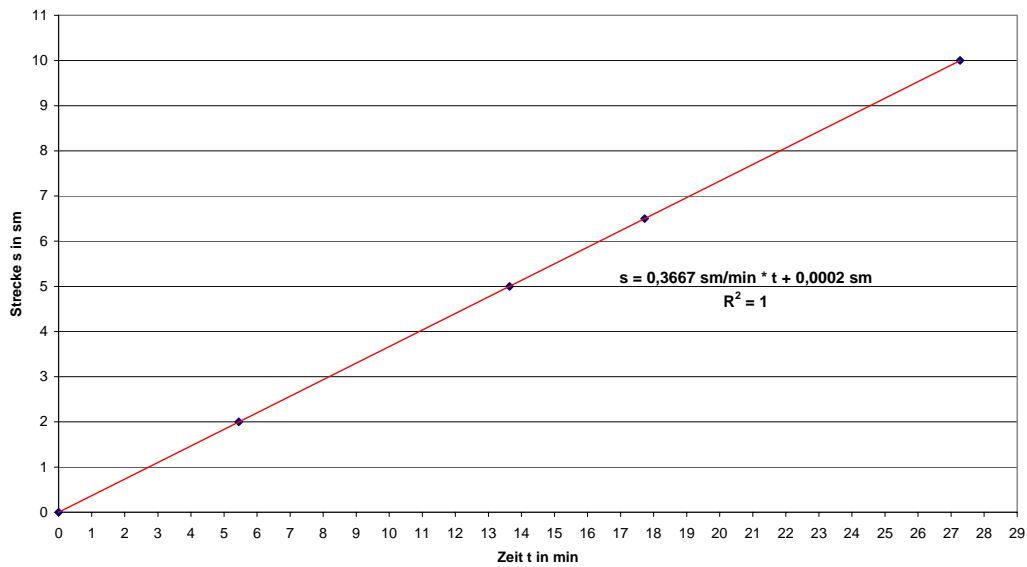
i	s sm	t min
0	0,00	0,00
1	2,00	5,45
2	5,00	13,64
3	6,50	17,73
4	10,00	27,27

Steigung 0,3667 sm/h
 Achsenabschnitt 0,0002 sm

Funktionsgleichung $f(t): s = v \cdot t + s_0$

$$s = 0,3667 \text{ sm/h} \cdot t + 0,0002 \text{ sm}$$

s-t-Diagramm





Uwe Rath

Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven

☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de