

2.5

Die Luft in einem 8 m langen, 6 m breiten und 3 m hohen Raum wird von 10 °C auf 20 °C erwärmt. Es soll angenommen werden, dass der Luftdruck konstant bleibt.

Welches Volumen hat die Luft, die bei diesem Vorgang aus dem Raum entweicht?




Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= 20\text{ °C} - 10\text{ °C} \\ &= \underline{10\text{ °C}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_1 \cdot \gamma \cdot \Delta t \\ &= 8\text{ m} \cdot 6\text{ m} \cdot 3\text{ m} \cdot \frac{1}{273,15\text{ K}} \cdot 10\text{ K} \\ &= 5,2718\dots\text{ m}^3 \\ &= \underline{\underline{\approx 5,3\text{ m}^3}}\end{aligned}$$

2.3 In einem Blechkanister dehnen sich 5 Liter Flüssigkeit bei einem Temperaturanstieg von 37,2 K um 0,25 Liter aus. Berechnen Sie die Ausdehnungszahl der Flüssigkeit.



Lösungsvorschlag

$$\Delta V = V_1 \cdot \gamma \cdot \Delta t$$

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V_1 \cdot \Delta t}$$

$$= \frac{0,25 \text{ l}}{5 \text{ l} \cdot 37,2 \text{ K}} = 0,001.344.086 \frac{1}{\text{K}}$$

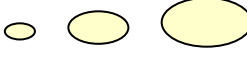
$$\approx \underline{\underline{0,001.344.1 \frac{1}{\text{K}}}}$$

2.4 Welcher Durchmesser muss einer bei 18 °C angefertigten Messdüse von kreisförmigem Querschnitt aus Chromnickelstahl² ($\alpha = 0,000\ 018\ 5\ \text{K}^{-1}$) gegeben werden, damit sie bei einer Betriebstemperatur von 350 °C einen Querschnitt von 25 mm² hat?

Lösungsvorschlag

$$d_2 = d_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

$$d_1 = \frac{d_2}{1 + \alpha \cdot \Delta t}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4 \cdot A_2}{\pi}}}{1 + \alpha \cdot \Delta t}$$


Kreisfläche: $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$
 $\Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$

$$d_1 = \frac{\sqrt{\frac{4 \cdot 25 \text{ mm}^2}{\pi}}}{1 + 0,000.018.5 \frac{1}{\text{K}} \cdot 332 \text{ K}}$$

$$= 5,60745... \text{ mm}$$

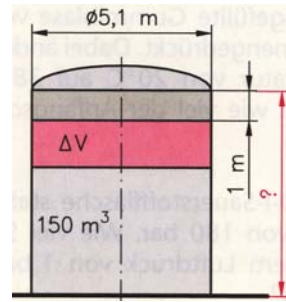
$$\approx \underline{\underline{5,607 \text{ mm}}}$$

² Eine Legierung aus Eisen, Chrom und Nickel, die sehr widerstandsfähig gegen Korrosion ist. Chrom-Nickel-Stahl wird zum Beispiel zur Herstellung von Spülen, Innenverkleidungen von Waschmaschinen und Geschirrspülmaschinen sowie für hochwertiges Besteck und Kochgeschirr verwendet.

2.2

Ein runder Tank mit einem Durchmesser von 5,1 m wird bei 10 °C mit 150 m³ Benzin ($\gamma = 0,001\ 00\ K^{-1}$) gefüllt.

Wie hoch muss der Tank mindestens sein, damit bei einer Temperatur von 40 °C über der Flüssigkeitsoberfläche noch ein Sicherheitsabstand von 1 m zur Decke verbleibt?



Lösungsvorschlag

a) Füllhöhe Benzin bei 40 °C

$$V_{Benzin_40^\circ C} = \frac{d_{Tank_40^\circ C}^2 \cdot \pi}{4} \cdot h_{Benzin_40^\circ C}$$

$$h_{Benzin_40^\circ C} = \frac{4 \cdot V_{Benzin_40^\circ C}}{d_{Tank_40^\circ C}^2 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot V_{Benzin_10^\circ C} \cdot (1 + \gamma_{Benzin} \cdot \Delta t)}{\left[d_{Tank_10^\circ C} \cdot (1 + \alpha_{Tank} \cdot \Delta t) \right]^2 \cdot \pi}$$

$$= \frac{4 \cdot 150\ m^3 \cdot \left(1 + 0,001 \frac{1}{K} \cdot 30\ K \right)}{\left[5,1\ m \cdot \left(1 + 0,000.011.5 \frac{1}{K} \cdot 30\ K \right) \right]^2 \cdot \pi}$$

$$= 7,5578\dots\ m$$

$$\approx \underline{\underline{7,558\ m}}$$

b) Höhe des Tanks bei 40 °C

$$h_{Tank_40^\circ C} = h_{Benzin_40^\circ C} + h_{Sicherheitsabs\ tan\ d}$$

$$= 7,558\ m + 1\ m$$

$$= \underline{\underline{8,558\ m}}$$

c) Mindesthöhe des Tanks bei 10 °C


$$h_{Tank_40^\circ C} = h_{Tank_10^\circ C} \cdot (1 + \alpha_{Tank} \cdot \Delta t)$$

$$h_{Tank_10^\circ C} = \frac{h_{Tank_40^\circ C}}{1 + \alpha_{Tank} \cdot \Delta t} = \frac{8,558\ m}{1 + 0,000.011.5 \frac{1}{K} \cdot 30\ K}$$

$$\approx \underline{\underline{8,529\ m}}$$

Füllhöhe Benzin bei 10 °C: 7,343 m

Wird die Änderung des Durchmessers des Tanks nicht berücksichtigt, ergäbe sich für die Füllhöhe des Benzins bei 40 °C: 7,563 m

Aufg. 2	<p><i>Themen:</i> Volumenbeeinflussung bei Temperaturänderung: Volumenänderung bei festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen</p>
2.1	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 80%;"> <p>Ein Tank mit einem Fassungsvermögen von 5000 Liter wird im Winter bei einer Temperatur von -3 °C vollständig mit Heizöl ($\gamma = 0,000\ 70\ \text{K}^{-1}$) gefüllt. Wie viel Liter Heizöl müssen bis zum Sommer mindestens verbraucht sein, damit der Tank bei 25 °C nicht überläuft?</p> <p><i>Lösungsvorschlag</i> <i>Hinweis:</i> Wir berücksichtigen, dass sich auch das Volumen des Tanks vergrößert wird. Es gilt: $V_{1_öl} = V_{1_Tank}$</p> $\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= 25\text{ °C} - (-3\text{ °C}) = 25\text{ °C} + 3\text{ °C} \\ &= \underline{28\text{ °C}} \end{aligned}$ $\begin{aligned} V_{\text{ausfließendes Öl}} &= V_{2_öl} - V_{2_Tank} \\ &= (V_{1_öl} + \Delta V_{öl}) - (V_{1_Tank} + \Delta V_{Tank}) \\ &= V_{1_öl} + \Delta V_{öl} - V_{1_Tank} - \Delta V_{Tank} \\ &= \Delta V_{öl} - \Delta V_{Tank} \\ &= V_{1_öl} \cdot \gamma_{öl} \cdot \Delta t - V_{1_Tank} \cdot 3\alpha_{Stahl} \cdot \Delta t \\ &= V_1 \cdot \Delta t \cdot (\gamma_{öl} - 3\alpha_{Stahl}) \\ &= 5000\ \text{l} \cdot 28\ \text{K} \cdot (0,000.70 - 3 \cdot 0,000.011.5) \frac{1}{\text{K}} \\ &= 5000\ \text{l} \cdot 28\ \text{K} \cdot (0,000.70 - 0,000.034.5) \frac{1}{\text{K}} \\ &= \underline{\underline{93,17\ \text{l}}} \end{aligned}$ </div> <div style="width: 15%; text-align: center;">  </div> </div>

1.5

Die Temperatur von Rauchgasen soll dadurch gemessen werden, dass die Dehnung eines Eisenrohres ($\alpha_{\text{Fe}} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) gegenüber einem koaxial verlaufenden Invarstab¹ ($\alpha_{\text{Invar}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) gleicher Länge mit einer Messuhr festgestellt wird.



Wie lang muss das Rohr sein, wenn es sich gegenüber dem Invarstab bei einer Temperaturzunahme von 1000 K um 10 mm verlängern soll und der Ausdehnungskoeffizient des Eisens je 100 K um $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ zunimmt?

Lösungsvorschlag

Hinweis:

Vor Beginn der Ausdehnung haben Eisenrohr und Invarstab die gleiche Länge l_1 .

$$\Delta l_{\text{Eisenrohr}} = l_1 \cdot (\alpha_{\text{Eisen}} + \Delta\alpha_{\text{Eisen}}) \cdot \Delta t$$

$$\Delta l_{\text{In var stab}} = l_1 \cdot \alpha_{\text{In var stab}} \cdot \Delta t$$

$$\begin{aligned} \Delta l_{\text{Eisenrohr}} - \Delta l_{\text{In var stab}} &= l_1 \cdot (\alpha_{\text{Eisen}} + \Delta\alpha_{\text{Eisen}}) \cdot \Delta t - l_1 \cdot \alpha_{\text{In var stab}} \cdot \Delta t \\ &= l_1 \cdot \Delta t \cdot [(\alpha_{\text{Eisen}} + \Delta\alpha_{\text{Eisen}}) - \alpha_{\text{In var stab}}] \end{aligned}$$

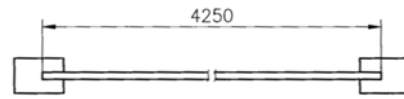
$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\Delta l_{\text{Eisenrohr}} - \Delta l_{\text{In var stab}}}{\Delta t \cdot [(\alpha_{\text{Eisen}} + \Delta\alpha_{\text{Eisen}}) - \alpha_{\text{In var stab}}]} \\ &= \frac{10 \text{ mm}}{1000 \text{ K} \cdot \left[(11 + 0,5 \cdot 10) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} - 2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} \right]} \\ &= \frac{10 \text{ mm}}{1000 \text{ K} \cdot (11 + 5 - 2) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}} \\ &= \frac{10 \text{ mm} \cdot 10^6}{1000 \cdot 14} \\ &= 714,2857... \text{ mm} \\ &\approx \underline{\underline{714,3 \text{ mm}}} \end{aligned}$$

¹ **Invar** ist eine Eisen-Nickel-Legierung mit 36 % Gehalt an Nickel (FeNi36).
 Siehe: <http://de.wikipedia.org/wiki/Invar>

1.4

Die Glasscheibe ($\alpha = 0,000\ 010\ 0\ \text{K}^{-1}$) eines Aluminiumschaufensters ($\alpha = 0,000\ 023\ 8\ \text{K}^{-1}$) habe bei $-15\ ^\circ\text{C}$ eine Breite von $4250\ \text{mm}$.

Wie groß ist die Längenausdehnung, die das Rahmenprofil bei einer Erwärmung des Glases auf $38\ ^\circ\text{C}$ aufnehmen muss?



Lösungsvorschlag

- a) Temperaturänderung für Glasscheibe und Rahmenprofil

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= 38\ ^\circ\text{C} - (-15\ ^\circ\text{C}) = 38\ ^\circ\text{C} + 15\ ^\circ\text{C} \\ &= \underline{53\ ^\circ\text{C}}\end{aligned}$$

- b) Längenausdehnung Glasscheibe

$$\begin{aligned}\Delta l_{\text{Glas}} &= l_1 \cdot \alpha_{\text{Glas}} \cdot \Delta t \\ &= 4250\ \text{mm} \cdot 0,000.010.0 \frac{1}{\text{K}} \cdot 53\ \text{K} \\ &= \underline{2,2525\ \text{mm}}\end{aligned}$$

- c) Längenausdehnung Rahmenprofil

$$\begin{aligned}\Delta l_{\text{Rahmen}} &= l_1 \cdot \alpha_{\text{Rahmen}} \cdot \Delta t \\ &= 4250\ \text{mm} \cdot 0,000.023.8 \frac{1}{\text{K}} \cdot 53\ \text{K} \\ &= \underline{5,3609... \text{mm}}\end{aligned}$$

- d) Das Profil dehnt sich mehr aus als die Glasscheibe (etwas mehr als das Doppelte). Dies ist bei der Fassung zu beachten.

1.2.b

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= 35\text{ }^\circ\text{C} - 20\text{ }^\circ\text{C} = 15\text{ }^\circ\text{C} \\ &= \underline{15\text{ K}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_2 &= l_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \\ &= 1000\text{ mm} \cdot \left(1 + 0,000.016.0 \frac{1}{\text{K}} \cdot 15\text{ K}\right) \\ &= \underline{\underline{1000,24\text{ mm}}}\end{aligned}$$

1.3

Ein Einfahrtstor aus unlegiertem Stahl ($\alpha = 0,000\ 011\ 5\ \text{K}^{-1}$) besteht aus 2 Flügeln, von denen jeder eine Breite von 2,85 m hat. Bei 0 °C besteht zwischen den beiden Flügeln ein Spalt von 2 mm.

Bei welcher Temperatur kann das Tor bereits nicht mehr ohne Probleme geöffnet werden?

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}\Delta l &= l_1 \cdot \alpha \cdot \Delta t \\ \Delta t &= \frac{\Delta l}{l_1 \cdot \alpha} \\ &= \frac{1\text{ mm}}{2850\text{ mm} \cdot 0,000.011.5 \frac{1}{\text{K}}} \\ &= 30,5110... \text{ K} \\ &= \underline{\underline{\approx 30,5\text{ K}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ t_2 &= t_1 + \Delta t \\ &= 0\text{ }^\circ\text{C} + 30,5\text{ }^\circ\text{C} \\ &= \underline{\underline{30,5\text{ }^\circ\text{C}}}\end{aligned}$$

KonstruktionsmechanikerIn – Einsatzgebiet Schiffbau
Technische Mathematik
Übungsaufgaben

Vorbemerkung:

Versuchen Sie die Aufgaben ohne Formelbuch zu lösen.

Aufg. 1	<p>Themen: Bauteilbeeinflussung bei Temperaturänderung: Längenänderung bei festen Stoffen</p>
1.1	<p>Ein Balkongeländer aus unlegiertem Stahl ($\alpha = 0,000\ 011\ 5\ K^{-1}$) wird bei einer Temperatur von $12\ ^\circ C$ auf eine Länge von $8255\ mm$ gefertigt. Beim Einbau erwärmt es sich durch Sonneneinstrahlung auf $46\ ^\circ C$.</p> <p>Welche Länge hat das Geländer nun?</p> <p>Lösungsvorschlag:</p> $\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= 46\ ^\circ C - 12\ ^\circ C = 34\ ^\circ C \\ &= \underline{34\ K} \\ l_2 &= l_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \\ &= 8255\ mm \cdot \left(1 + 0,000.011.5 \frac{1}{K} \cdot 34\ K \right) \\ &= 8258,2277\ mm \\ &= \underline{\underline{\approx 8258\ mm}} \end{aligned}$

1.2	<p>Ein Metallmaßstab aus legiertem Stahl ($\alpha = 0,000\ 016\ 0\ K^{-1}$) habe bei $20\ ^\circ C$ eine Länge von $1\ m$.</p> <p>Welche Länge hat der Maßstab</p> <p style="margin-left: 20px;">a. bei $-10\ ^\circ C$ und</p> <p style="margin-left: 20px;">b. bei $35\ ^\circ C$?</p>
1.2.a	<p>Lösungsvorschlag</p> $\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= -10\ ^\circ C - 20\ ^\circ C = -30\ ^\circ C \\ &= \underline{-30\ K} \\ l_2 &= l_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \\ &= 1000\ mm \cdot \left(1 + 0,000.016.0 \frac{1}{K} \cdot (-30\ K) \right) \\ &= \underline{\underline{999,52\ mm}} \end{aligned}$