Geneigte (Schiefe) Ebene, Reibungskraft

Übungen

1 Auf die Bremsscheibe einer Scheibenbremse wirken die beiden Reibkräfte von jeweils F_R = 6,4 kN. Als Reibungszahl Bremsbelag-Stahl wurde μ = 0,40 ermittelt. Wie groß ist die Kraft F, mit der das Hydrauliksystem jeweils einen Bremsbelag gegen die Scheibe presst?

http://de.wikipedia.org/wiki/Scheibenbremse

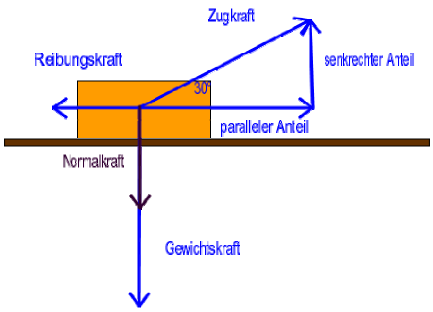
Shimano XT Disc (hydraul.)

Lösung:

$$F = F_N$$
$$F_R = \mu \cdot F_N$$
$$F_N = \frac{F_R}{\mu} = \frac{6{,}4\,kN}{0{,}4} = \underline{\underline{16\,kN}}$$

2 Berechnen Sie die Zugkraft für die Haft- und Gleitreibung, wenn folgende Daten gegeben sind:

Masse *m* des Körpers: 220 kg
Werkstoffpaarung: Holz/Stahl
Reibungszustand: trocken



Lösungen

Berechnung der Gewichtskraft (*g* y 10 m/s²):
Hinweis: Die Berechnung der Gewichtskraft ist nicht gefragt und wäre auch für die Berechnung der Reibungs- und Zugkräfte nicht erforderlich.

$$F_g = m \cdot g \approx 220\ kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \approx 2200\ N$$
$$\underline{\underline{\approx 2{,}2\ kN}}$$

Berechnung der Normalkraft:
Hinweis: Die Auflagefläche verläuft waagerecht, d. h. der Winkel zwischen der Normalkraft und der Auflagefläche beträgt 90°.

$$F_N = F_g \cdot \cos\alpha = F_g \cdot \cos 90° = F_g \cdot 1 = F_g$$
$$\underline{\underline{= 2{,}2\ kN}}$$

Berechnung der Reibungskräfte:

Werkstoffpaarung	Reibungszustand	Haftreibungsfaktor μ_0	Gleitreibungsfaktor μ
Holz/Stahl	trocken	0,55	0,35
Reibungskräfte		$F_{R_0} = \mu_0 \cdot F_N = 0{,}55 \cdot 2{,}2\ kN \underline{\underline{= 1{,}21\ kN}}$	$F_R = \mu \cdot F_N = 0{,}35 \cdot 2{,}2\ kN \underline{\underline{= 0{,}77\ kN}}$

Berechnung der Zugkräfte
Hinweis: Um den Körper in Bewegung zu bringen (Überwindung der Haftreibung) bzw. danach in Bewegung zu halten, wäre als Zugkraft die in der Skizze dargestellte Kraft „paralleler Anteil" *F'* ausreichend. Da die tatsächliche Zugkraft aber unter dem Winkel ρ = 30° schräg nach oben angreift, müssen wir diese berechnen:

Es gilt:	Zugkraft	
	bei Haftreibung	bei Gleitreibung
$\cos\rho = \frac{AK}{HY} = \frac{F'}{F_{Zugkraft}}$ $F_{Zugkraft} = \frac{F'}{\cos\rho} = \frac{-F_R}{\cos\rho}$	$F_{Z0} = \frac{-F_{R0}}{\cos 30°} = \frac{-1{,}21kN}{\cos 30°} \underline{\underline{\approx -1{,}39\ kN}}$	$F_Z = \frac{-F_R}{\cos 30°} = \frac{-0{,}77kN}{\cos 30°} \underline{\underline{\approx -0{,}89\ kN}}$

3.1 Um wie viel Grad muss eine Paketrutsche gegen die Horizontale geneigt sein, wenn Pakete mit einer Haftreibungszahl μ_0 = 0,6 darauf abgleiten sollen?

3.2 Mit welcher Geschwindigkeit *v* erreichen die Pakete das Ende der Rutsche, wenn diese 15 m lang ist und die Gleitreibungszahl μ = 0,4 beträgt?

Lösungen

3.1 Der Körper beginnt zu rutschen, wenn die Haftreibungskraft überwunden wird, d. h.

$$F_H \geq F_{Ro}$$

$$F_H \geq \mu_0 \cdot F_N$$

$$F_g \cdot \sin\alpha = \mu_0 \cdot F_g \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mu_o$$

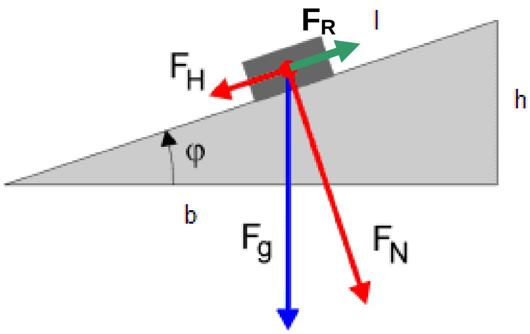
$$\tan\alpha = \mu_o$$

$$\alpha = \arctan\mu_0$$

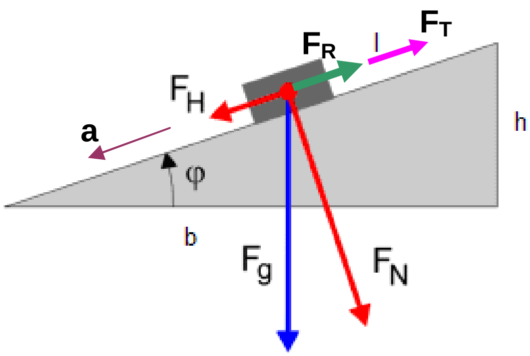
$$= \arctan 0{,}6$$

$$\alpha = 30{,}9637...^\circ$$

$$\underline{\underline{\alpha \approx 31^\circ}}$$



3.2 Wenn $F_H > F_R$, wird der Körper nur noch von der Gleitreibungskraft gebremst. Der Körper wird hangabwärts beschleunigt. Der Beschleunigung entgegen wirkt die Trägheitskraft F_T.



$$F_T + F_R = F_H$$

$$F_T = F_H - F_R$$

$$= F_H - F_R$$

$$= F_H - \mu \cdot F_N$$

$$m \cdot a = F_g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot F_g \cdot \cos\alpha$$

$$= F_g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

Diese Gleichung sollten Sie als Formel in Ihr Tabellenbuch übernehmen (Schiefe Ebene)

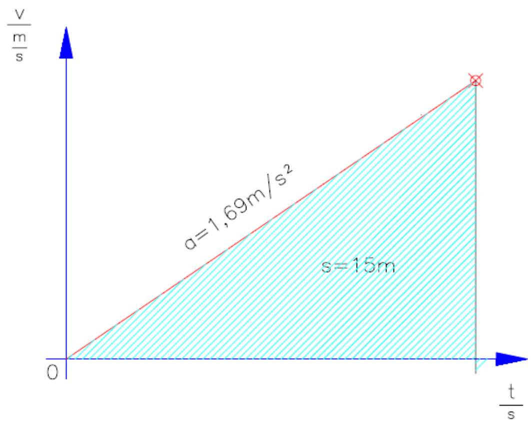
Lösung zu 3.2 (Forts.)

$$a = 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot(\sin 31° - 0{,}4\cdot\cos 31°)$$

$$= 1{,}688999\frac{m}{s^2}$$

$$\approx 1{,}69\frac{m}{s^2}$$

Zur Berechung der Geschwindigkeit wird das v-t-Diagramm skizziert (vgl. Abb. rechts).



v-t-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit v_0 = 0.

Die Fläche für den zurückgelegten Weg ist ein Dreieck. Draus folgt:

① $s = \frac{1}{2}\cdot v\cdot t$

Mit dieser Gleichung kann v noch nicht berechnet werden, da neben *v* auch die Zeit *t* unbekannt ist. Aus der Funktion für *v* folgt aber mit v_0 = 0:

$$v = a\cdot t$$

② $t = \frac{v}{a}$

Wir setzen den Ausdruck $t = \frac{v}{a}$ in den Term ① ein und können dann *v* berechnen:

$$s = \frac{1}{2}\cdot v\cdot t = \frac{1}{2}\cdot v\cdot\frac{v}{a}$$

$$= \frac{v^2}{2\cdot a}$$

$$2\cdot a\cdot s = v^2$$

$$v^2 = 2\cdot a\cdot s$$

$$v = \sqrt{2\cdot a\cdot s}$$

$$\approx \sqrt{2\cdot 1{,}69\frac{m}{s^2}\cdot 15m}$$

$$\approx \sqrt{50{,}7\frac{m^2}{s^2}}$$

$$\approx 7{,}12\frac{m}{s}$$

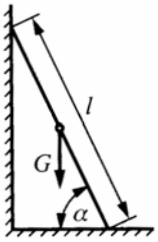
Lösungshinweis/e:

Die Fläche im v-t-Diagramm stellt den zurückgelegten Weg dar.

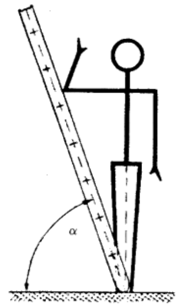
Für die Geschwindigkeit gilt die lineare Funktion: $v = a\cdot t + v_0$

Diese Formel finden Sie auch im Tab.-Buch, S. 34, d. h. Sie müssen sie nicht herleiten.

4

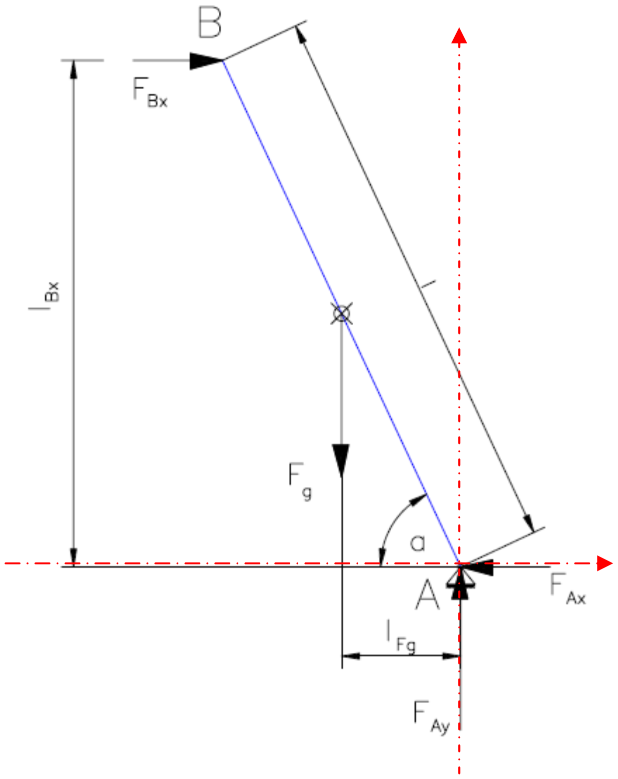


Ein Balken, der reibungslos an einer Wand lehnt, stützt sich gegen den Fußboden mit der Reibungszahl μ. Wie groß muss der Winkel α mindestens sein, damit der Balken nicht wegrutscht?



α = 60 bis 70° bei Stufenanlegeleitern
α = 65 bis 75° bei Sprossenanlegeleitern

Lösung



①
$$\sum F_x = 0$$
$$-F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$
$$F_{Ax} = F_{Bx}$$

②
$$\sum F_y = 0$$
$$F_{Ay} - F_g = 0$$
$$F_{Ay} = F_g$$

③
$$\sum M_{(A)} = 0$$
$$F_{Bx} \cdot l_{Bx} - F_g \cdot l_{Fg} = 0$$
$$F_{Bx} \cdot l_{Bx} = F_g \cdot l_{Fg}$$
$$F_{Bx} = \frac{F_g \cdot l_{Fg}}{l_{Bx}}$$
$$= \frac{F_g \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos\alpha}{l \cdot \sin\alpha}$$
$$= \frac{F_g \cdot l \cdot \cos\alpha}{2 \cdot l \cdot \sin\alpha}$$
$$F_{Bx} = \frac{F_g}{2 \cdot \tan\alpha}$$

Aus ① und ③ folgt

④ $$F_{Ax} = \frac{F_g}{2 \cdot \tan\alpha}.$$

Nun ist F_{Ax} gleich der Haftreibungskraft F_{R0}, da nur diese Kraft das Wegrutschen der Bohle verhindert. Die zugehörige Normalkraft ist gleich dem Betrag von F_{Ay}. Daraus folgt:

$$F_{Ro} = F_{Ax} = \frac{F_g}{2 \cdot \tan\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_g}{2 \cdot F_{R0}} = \frac{F_g}{2 \cdot \mu_0 \cdot F_N} = \frac{F_g}{2 \cdot \mu_0 \cdot F_{Ay}} = \frac{F_g}{2 \cdot \mu_0 \cdot F_g} = \frac{1}{2 \cdot \mu_0}$$

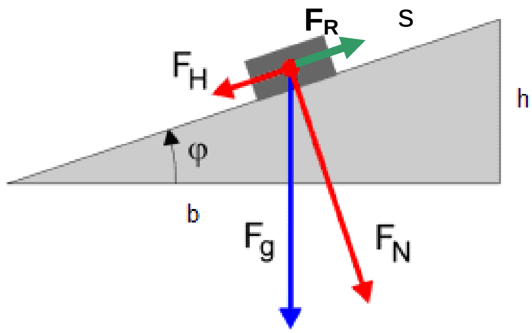
$$\alpha = \arctan\frac{1}{2 \cdot \mu_0}$$

5.1 Ein Kind mit einer Masse von 40 kg rutsche eine Rutschbahn hinunter, die einen Neigungswinkel von 30° zur Horizontalen besitzt. Die Gleitreibungszahl zwischen Kind und Rutschbahn sei $\mu = 0.2$. Wenn das Kind in einer Höhe von 4 m zu rutschen beginnt, wie schnell bewegt es sich dann, wenn es den Boden erreicht? Machen Sie eine Skizze und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein!

5.2 Welche Arbeit hat die Gravitationskraft beim Rutschen am Kind geleistet und welche Arbeit ist durch die Reibung in Wärme umgewandelt worden?

Lösungen

5.1 **a) Länge der Rutsche**



$$\sin\rho = \frac{GK}{HY} = \frac{h}{s}$$

$$h = s \cdot \sin\rho$$

$$s = \frac{h}{\sin\rho} = \frac{4\,m}{\sin 30°}$$

$$= \frac{4\,m}{0{,}5} = \frac{4\,m}{\frac{1}{2}} = 4\,m \cdot \frac{2}{1} = \underline{\underline{8\,m}}$$

b) Erreichte Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot (\sin\rho - \mu \cdot \cos\rho) \cdot s}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot (\sin\rho - \mu \cdot \cos\rho) \cdot \frac{h}{\sin\rho}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot (\sin\rho - \mu \cdot \cos\rho) \cdot \frac{1}{\sin\rho}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\sin\rho}{\sin\rho} - \frac{\mu \cdot \cos\rho}{\sin\rho}\right)}$$

$$\frac{\mu \cdot \cos\rho}{\sin\rho} = \frac{\mu}{\frac{\sin\rho}{\cos\rho}} = \frac{\mu}{\tan\rho}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\tan\rho}\right)}$$

Bedingung für $v > 0$:

$h > 0$ und

$$1 - \frac{\mu}{\tan\rho} > 0$$

$$1 > \frac{\mu}{\tan\rho}$$

$$\tan\rho > \mu$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(1 - \frac{0{,}2}{\tan 30°}\right)}$$

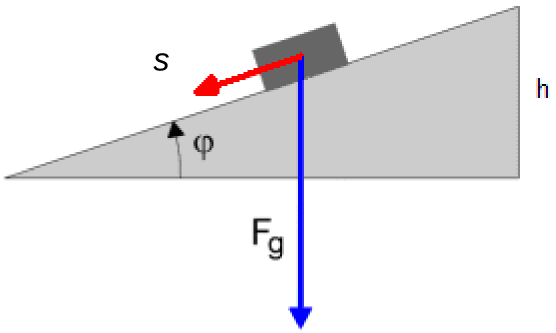
$$= 7{,}16196...\frac{m}{s} \approx \underline{\underline{7{,}2\frac{m}{s}}}$$

c) Kinetische Energie des Kindes beim Erreichen des Bodens:

$$W_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{40\,kg \cdot \left(7{,}16196...\frac{m}{s}\right)^2}{2} \approx 1025{,}9\,J$$

5.2 a) Verrichtete Arbeit der Gravitationskraft

$$
\begin{aligned}
W &= F_g \cdot s \cdot \cos \sphericalangle\left(\vec{F_g}, \vec{s}\right) \\
&= F_g \cdot s \cdot \cos\left(90° - \rho\right) \\
&= F_g \cdot s \cdot \sin\rho \\
&= F_g \cdot h \\
&= m \cdot g \cdot h \\
&= 40\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 4\ m \\
&= 1569{,}6\ Nm \\
&\approx \underline{\underline{1{,}57\ kJ}}
\end{aligned}
$$



b) Reibungsarbeit ⇨ Wärme

$$
\begin{aligned}
W_R &= F_R \cdot s \cdot \cos 180° \\
&= \mu \cdot F_N \cdot s \cdot (-1) \\
&= -\mu \cdot F_g \cdot \cos\rho \cdot s \\
&= -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\rho \cdot \frac{h}{\sin\rho} \\
&= -m \cdot g \cdot h \cdot \frac{\mu \cdot \cos\rho}{\sin\rho} \\
&= -m \cdot g \cdot h \cdot \frac{\mu}{\tan\rho} \\
&= -40\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 4\ m \cdot \frac{0{,}2}{\tan 30°} \\
&= -543{,}7253...\ Nm \\
&\approx \underline{\underline{-544\ J}}
\end{aligned}
$$

c) Zusammenfassung

Arbeit bewirkt Änderung von Energie. Die Addition der beiden nach 5.2.a und 5.2.b berechneten Arbeiten muss gleich der nach 5.1.c berechneten gewonnenen kinetischen Energie sein:

1569,6 J + (- 544 J) = 1025,9 J = 1025,9 J