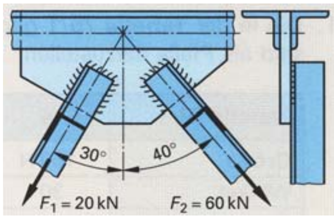
Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Technische Mathematik für Metallberufe

3.5 Kräfte an Bauelementen

Technische Mathematik für Metallberufe – Lehr- und Übungsbuch; Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel; 2005, 4. Aufl., ISBN 3-8085-1174-5

S. 76, Aufg. 8

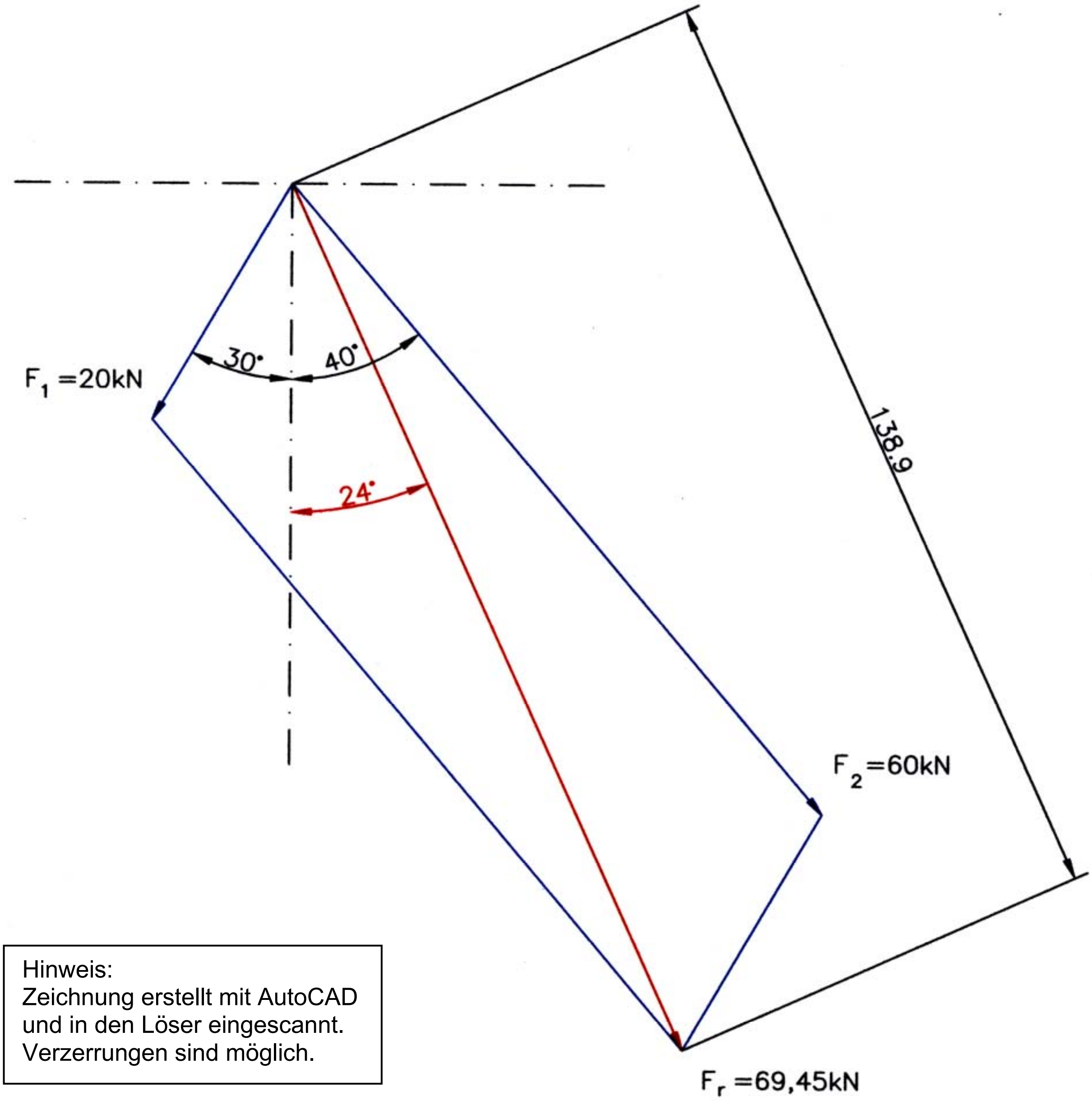


An einem Knotenblech greifen die Kräfte F_1 und F_2 an.

a) Welche resultierende Gesamtkraft F_r üben die zwei Kräfte auf das Knotenblech aus?

b) Welchen Winkel α bildet die Resultierende mit der Senkrechten?

Gewählter Kräftemaßstab M_K = 5 kN/cm



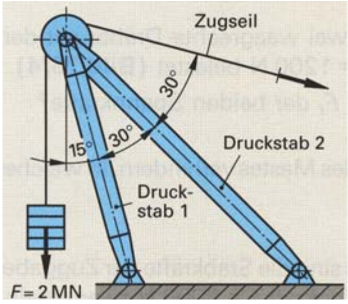
Hinweis:
Zeichnung erstellt mit AutoCAD und in den Löser eingescannt. Verzerrungen sind möglich.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Technische Mathematik für Metallberufe – Lehr- und Übungsbuch; Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel; 2005, 4. Aufl., ISBN 3-8085-1174-5

S. 76, Aufg. 11

Welche Kräfte entstehen in den Druckstäben1 und 2, wenn der Kran eine Last *F* = 2 MN hebt?



Gewählter Kräftemaßstab M_K = 0,25 MN/cm

Lösungshinweis:

Umlenkrolle:

Eine Rolle (auch: *Umlenkrolle*) ist ein Kraftwandler oder Maschinenelement bestehend aus einem Rad oder einer Kreisscheibe, dass möglichst reibungsarm auf einer Achse gelagert ist. Sie dient der Führung eines Seils oder einer Kette. Am Rand der Kreisscheibe befindet sich meist ein Steg, der ein Abrutschen des Seils verhindert. *Rollen* werden zur Änderung der Richtung einer Zugkraft (des Kraftvektors) (ohne Änderung des Betrags der Kraft), zur Führung des Seils oder als Ausgleichselement in Seilsystemen verwendet. Große Umlenkrollen, beispielsweise an Fördertürmen oder Seilbahnen, werden *Seilscheiben* genannt. In der Seefahrt wird eine Kreisscheibe mit ihrem Gehäuse als Block bezeichnet. Typische Anwendungen sind Seiltransmission und Vorrichtungen wie Aufzüge, Flaschenzüge und Kräne.[1]

Bei der Lösung der gestellten Aufgabe werden Verluste durch die Spannung des Seils, Eigengewicht des Seils und die Reibung der Lagerung vernachlässigt.

Die Lösung erfolgt in zwei Schritten:

Schritt 1:[2]

Bestimmung der resultierenden Kraft F_r aus der Last F_L = 2 MN und der im Zugseil wirkenden Kraft F_{Zug}. = 2 MN (vgl. Zeichnung S. 3)

Die Wirkungslinien der Kräfte F_L und F_{Zug} werden tangential an die Umlenkrolle gezeichnet (Winkel α = 75°) und so weit verlängert, dass wir den Schnittpunkt S erhalten.

Von diesem Schnittpunkt werden die Kräfte abgetragen:

$$Pfeillänge\ l = \frac{F}{M_K} = \frac{2\ MN}{0{,}25\ \frac{MN}{cm}} = 8\ cm$$

Nach Konstruktion des Kräfteparallelogramms wird die resultierende Kraft (Ersatzkraft) bestimmt:

Resultierende Kraft: $F_r = l_r \cdot M_K = 12{,}692\ cm \cdot 0{,}25 \frac{MN}{cm} = 3{,}172\ MN$.

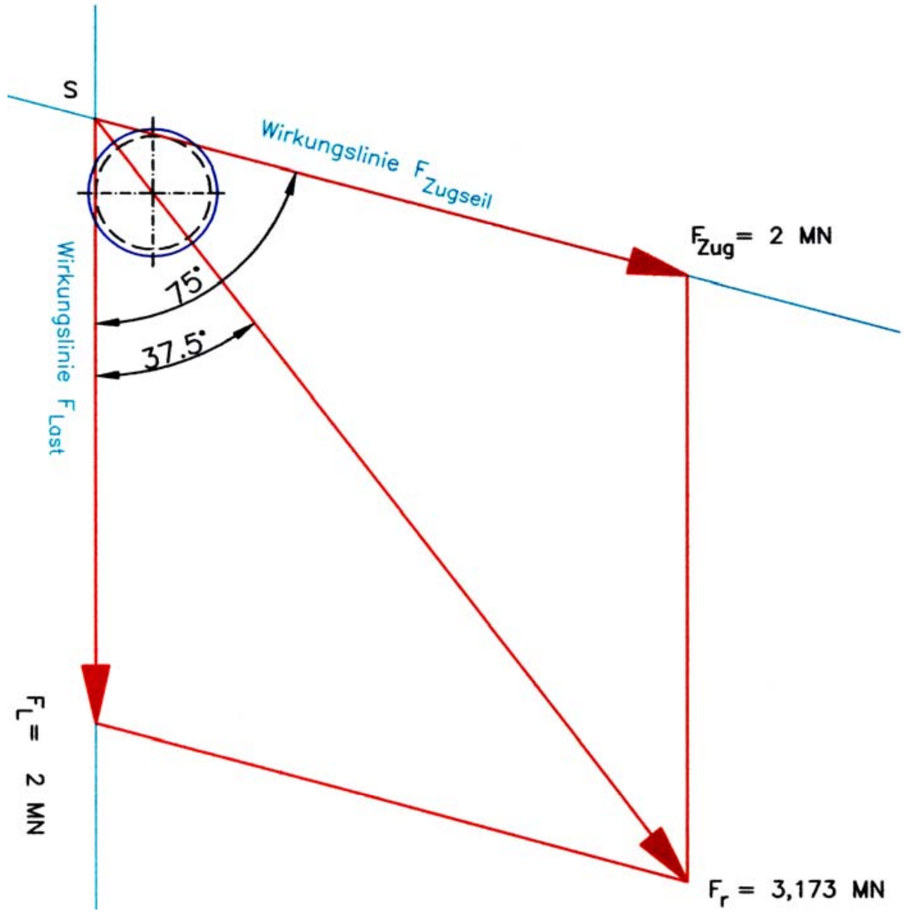
Die Wirkungslinie der resultierenden Kraft verläuft auf der Winkelhalbierenden des Winkels α = 75° und durch den Mittelpunkt der Umlenkrolle.

---

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Rolle_(Physik)
[2] Im Unterricht haben wir gleich für alle Kräfte den Mittelpunkt der Umlenkrolle als Kraftangriffspunkt gewählt. Das ist bei dieser Aufgabenstellung zulässig. Hier wird die Lösung ausführlicher dargestellt.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Abb.: Kräfteparallelogramm für F_L und F_{Zug} (Zusammensetzen von Kräften)



Schritt 2:

Zerlegung der resultierenden Kraft F_r in die zwei in die Druckstäbe wirkenden Kräfte F_1 und F_2 zerlegt (vgl. Zeichnung S. 4)

Die Wirkungslinien dieser Kräfte schneiden sich im Mittelpunkt der Umlenkrolle. Wir zeichnen die Wirkungslinien dieser Kräfte und verschieben den Vektor der resultierenden Kraft F_r in diesen Schnittpunkt.

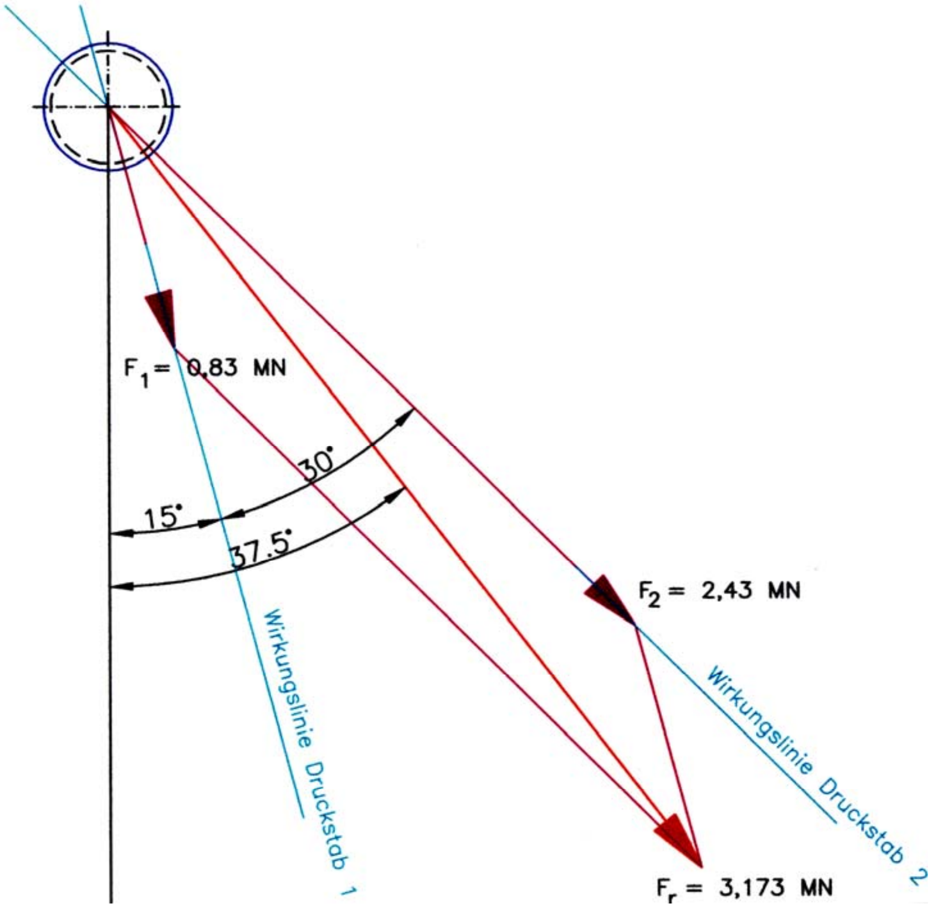
Die resultierende Kraft F_r ist die Diagonale in dem Kräfteparellelogramm, dass sich durch die Parallelverschiebungen der Wirkungslinien von F_1 und F_2 ergibt. Die Parallelen zu F_1 und F_2 müssen dabei durch die Pfeilspitze von F_r verlaufen.

Kraft im Druckstab 1: $F_1 = l_1 \cdot M_K = 3{,}32\ cm \cdot 0{,}25 \dfrac{MN}{cm} = 0{,}83\ MN$

Kraft im Druckstab 2: $F_2 = l_2 \cdot M_K = 9{,}72\ cm \cdot 0{,}25 \dfrac{MN}{cm} = 2{,}43\ MN$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Abb.: Kräfteparallelogramm für F_1 und F_2 (Zerlegung einer Kraft)



Zusatzaufgaben zu den Aufgaben S. 76, Aufg. 8 und Aufg. 11:

Zusatzaufgabe 1:

Bestimmen Sie die Profile (Winkelprofil in Aufg. 8; Rohre in Aufg. 11). Entscheiden Sie dabei hinsichtlich der vorliegenden Belastungsfälle, Belastungsarten und Festigkeitswerte. Wählen Sie als Werkstoff S235. Als Sicherheitszahl wählen Sie den höchsten Wert, der in Ihrem Tabellenbuch für den jeweiligen Belastungsfall vorgegeben ist.

Zusatzaufgabe 2:

Als Anhang ist diesem Aufgabenheft mit Löser eine Information zum Sinus- und Kosinussatz beigefügt. Vgl. Sie dazu auch: Tabellenbuch Metall, Thema Winkelfunktionen, Winkel, Strahlensatz.

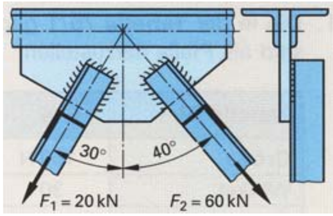
Berechnen Sie die Kräfte in den Aufg. 8 und 11 mit Hilfe dieser beiden Sätze aus der Trigonometrie.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Zusatzaufgabe 1:

S. 76, Aufg. 8

Bestimmung des L-Stahls



	Winkel für F_1	Winkel für F_2
Belastungsfall, gewählt	I (ruhend)	
Belastungsart	Zugspannung	
Sicherheitszahl v	1,5	
Werkstoff	S235	
Grenzspannung	$\sigma_{lim} = 235\ N/mm^2$	
Zulässige Zugspannung	$\sigma_{z\,zul} = \frac{\sigma_{lim}}{\upsilon} = \frac{235\ N/mm^2}{1{,}5} = 156{,}\overline{6}\ N/mm^2$	
Erforderliche Querschnittsfläche	$S = \frac{F}{\sigma_{z\,zul}}$ $= \frac{20000N}{156{,}\overline{6}\ N/mm^2}$ $= 127{,}6595...mm^2$ $\approx 1{,}28\ cm^2$	$S = \frac{F}{\sigma_{z\,zul}}$ $= \frac{60000N}{156{,}\overline{6}\ N/mm^2}$ $= 382{,}9787...mm^2$ $\approx 3{,}83\ cm^2$
Formstahl	Gleichschenkliger, scharfkantiger L-Stahl, warmgewalzt	
Gewählt:	LS 20 x 4 DIN 1022 – S235JR (a = 20 mm, t = 4 mm, S = 1,44 cm^2)	LS 45 x 5 DIN 1022 – S235JR (a = 45 mm, t = 5 mm S = 4,25 cm^2)

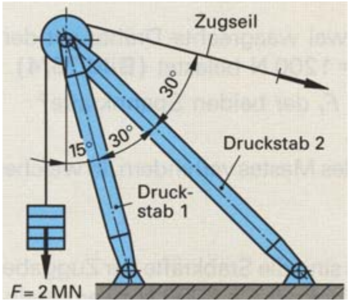
Technische Daten aus

Tabellenbuch Metall
Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel
1999, 41. Aufl.; S. 40, 41, 142;
ISBN 3-8085-1671-2

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

S. 76, Aufg. 11

Bestimmung der Druckstäbe 1 und 2



	Rohr für Druckstab 1: F_1	Rohr für Druckstab 2: F_2
Belastungsfall, gewählt	II (schwellend)	
Belastungsart	Druckspannung	
Sicherheitszahl v	2,4	
Werkstoff	S235	
Grenzspannung	σ_{lim} = 235 N/mm²	
Zulässige Zugspannung	$\sigma_{z\,zul} = \frac{\sigma_{lim}}{\upsilon} = \frac{235\ N/mm^2}{2{,}4} = 97{,}91\overline{6}\ N/mm^2$	
Erforderliche Querschnittsfläche	$S = \frac{F}{\sigma_{z\,zul}}$ $= \frac{830000 N}{97{,}91\overline{6}\ N/mm^2}$ $= 8476{,}595...mm^2$ $\approx 84{,}77\ cm^2$	$S = \frac{F}{\sigma_{z\,zul}}$ $= \frac{2.430.000 N}{97{,}91\overline{6}\ N/mm^2}$ $= 24817{,}021...mm^2$ $\approx 248{,}2\ cm^2$
Formstahl	Nahtloses Stahlrohr, warm gewalzt **DIN EN 10210** Werkstoff: S 235 JRH http://www.hoberg-driesch.de/deutsch/produkte/default.asp?NAV2=produkte&text=1	
Gewählt:	D = 133 mm, s = 25,0 mm, S = 84,8 cm² m‘ = 66,6 kg/m	D = 298,5 mm, s = 30,0 mm, S = 253,05 cm² m‘ = 198,65 kg/m

Technische Daten aus

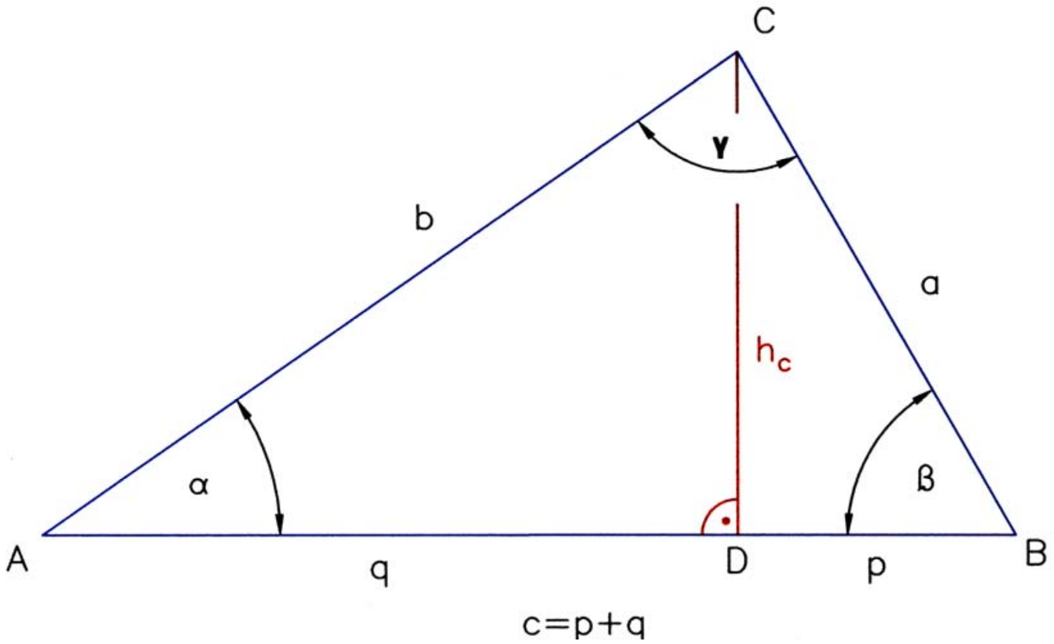
Tabellenbuch Metall
Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel
1999, 41. Aufl.; S. 40, 41;
ISBN 3-8085-1671-2

Georg Dreyer u. Egon Münder: Formelsammlung und Rechenbeispiele zur Festigkeitslehre;
Leipzig: VEB Fachbuchverlag; 1969, S. 156

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Anhang 1: **Kosinussatz**

a) Spitzwinkliges Dreieck



Für die **Seite *a*** im rechtwinkligen Dreieck ΔBDC gilt:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= h_c^2 + p^2 \\
&= h_c^2 + (c-q)^2 \\
&= h_c^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot q + q^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot q \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\alpha
\end{aligned}
$$

ΔBDC : Lehrsatz des Pythagoras

2. Binomische Formel
$(c-q)^2 = c^2 - 2\cdot c\cdot q + q^2$

ΔADC: Lehrsatz des Pythagoras
$b^2 = h_c^2 + q^2$

ΔADC: Winkelfunktion
$\cos a = \frac{AK}{HY} = \frac{q}{b} \quad \Rightarrow \quad q = b\cdot\cos\alpha$

Für die **Seite *b*** im rechtwinkligen Dreieck ΔADC gilt:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= h_c^2 + q^2 \\
&= h_c^2 + (c-p)^2 \\
&= h_c^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot p + p^2 \\
&= a^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot p \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos\beta
\end{aligned}
$$

ΔADC : Lehrsatz des Pythagoras

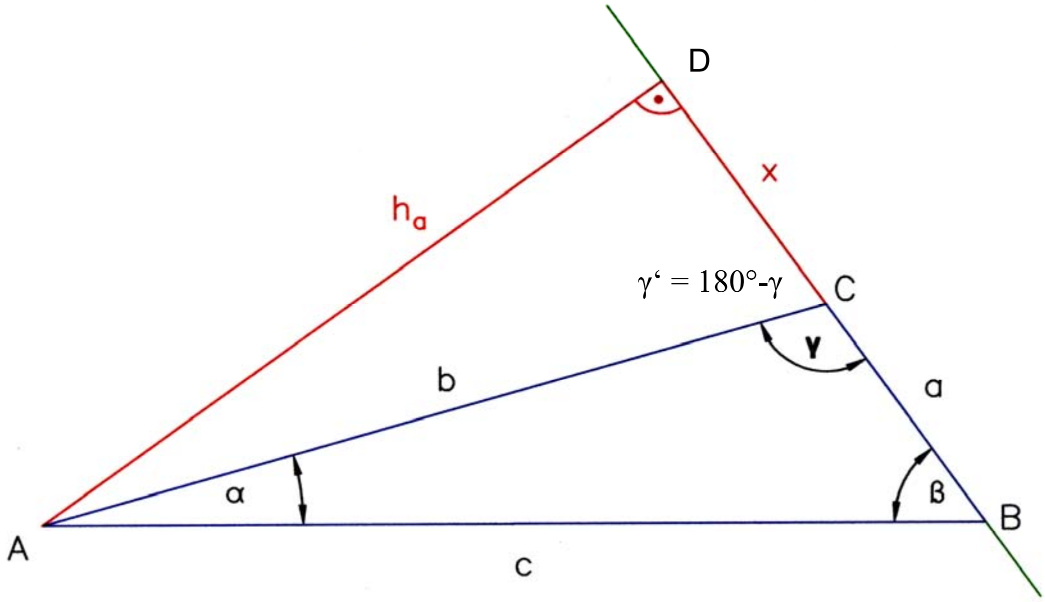
2. Binomische Formel
$(c-p)^2 = c^2 - 2\cdot c\cdot p + p^2$

ΔBDC: Lehrsatz des Pythagoras
$a^2 = h_c^2 + p^2$

ΔBDC: Winkelfunktion
$\cos\beta = \frac{AK}{HY} = \frac{p}{a} \quad \Rightarrow \quad p = a\cdot\cos\beta$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

b) Stumpfwinkliges Dreieck



Für die **Seite *c*** im rechtwinkligen Dreieck ΔADB gilt:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= h_a^2 + (a+x)^2 \\
&= h_a^2 + a^2 + 2\cdot a\cdot x + x^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot x \\
&= a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\gamma' \\
&= a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot \cos(180° - \gamma) \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\gamma
\end{aligned}
$$

ΔADB : Lehrsatz des Pythagoras

1. Binomische Formel
$(a+x)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot x + x^2$

ΔADC: Lehrsatz des Pythagoras
$b^2 = h_a^2 + x^2$

ΔADC: Winkelfunktion
$\cos\gamma' = \frac{AK}{HY} = \frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x = b\cdot\cos\gamma'$

Vgl.: http://www.mathe-online.at/mathint/wfun/i.html
$\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$

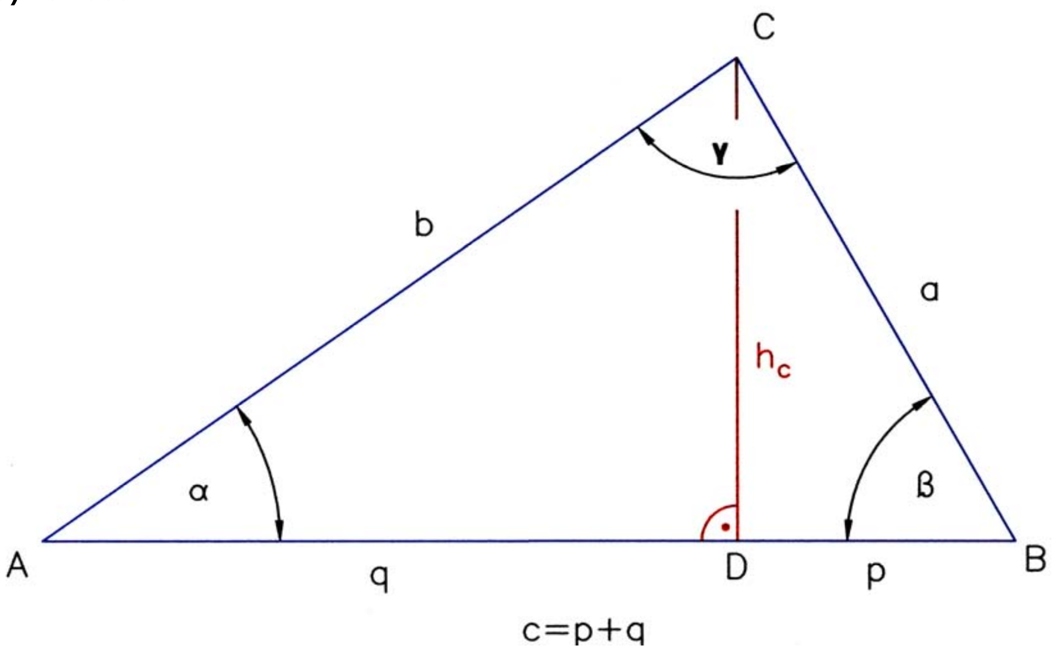
Kosinussatz

In jedem Dreieck gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ sowie zwei analoge Beziehungen, die aus entsprechenden Umbenennungen der Symbole entstehen. Der Satz kann unter anderem dazu benutzt werden, die Winkel aus den Seiten eines Dreiecks zu berechnen. Er ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras und insbesondere bei der Lösung von Vermessungsaufgaben von Bedeutung.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Anhang 2: Sinussatz

a) Sinussatz



Für das rechtwinklige Dreieck ΔADC gilt: $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$

Für das rechtwinklige Dreieck ΔBDC gilt: $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$

Stellen wir diese beiden Gleichungen nach h_c um, ergibt sich

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$
$$h_c = a \cdot \sin\beta$$
$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Der Nachweise $\ldots = \frac{c}{\sin\gamma}$ fehlt hier.

Die Gleichheit mit $\frac{a}{\sin\alpha}$ bzw. $\frac{b}{\sin\beta}$ ergibt sich entsprechend durch Benutzung der Höhe h_a oder h_b.

Häufig wird der Sinussatz auch als Verhältnisgleichung formuliert

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

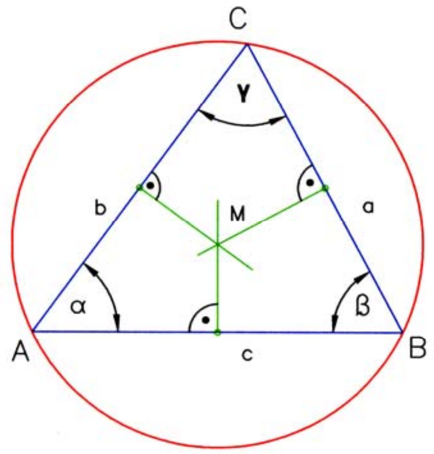
Der Sinussatz ist anwendbar, wenn zwei Winkel und eine Seite oder zwei Seiten und ein, nicht von den beiden Seiten eingeschlossener Winkel gegeben sind. Er wurde von Al-Battani gefunden und bewiesen.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

b) Sinussatz und Umkreis des Dreiecks

Sind *a*, *b* und *c* die Seiten eines Dreiecks, *α*, *β* und *γ* die jeweils gegenüber liegenden Winkel, *r* der Radius und *U* der Umfang des Umkreises, dann gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\cdot r = \frac{U}{\pi}$$

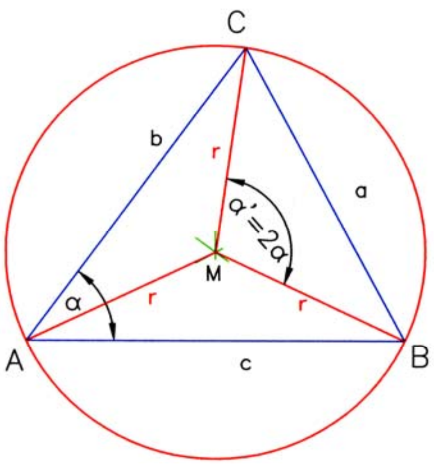


Konstruktion des Umkreises:

1. Auf jeder Seite des Dreiecks die Mittelsenkrechte errichten.
2. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises.
3. Umkreis zeichnen.

Die Seiten des Dreiecks sind in dem Kreis Sehnen. Die den Seiten gegenüberliegenden Winkel sind Peripheriewinkel.

Tip:
http://de.wikipedia.org/wiki/Umkreis



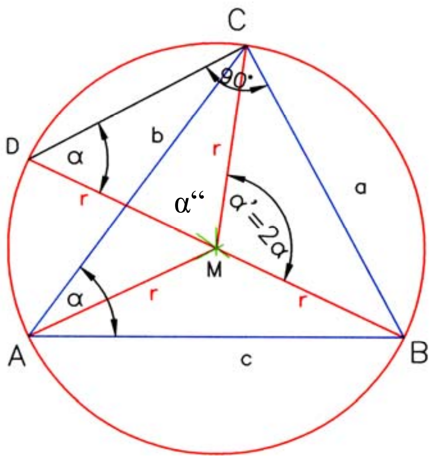
Umkreis, Peripherie- und Zentriwinkel:

1. Vom Mittelpunkt des Umkreises Radien zu den Punkten A, B und C des Dreiecks zeichnen.

   Die weiteren Betrachtungen werden nur mit der Seite a und dem zugehörigen Winkel α vorgenommen:

2. Zum Peripheriewinkel α den Zentriwinkel α‘ benennen. Es gilt:
   α‘ = 2α (Kreiswinkelsatz)

Tip: http://de.wikipedia.org/wiki/Kreiswinkel



$$2r = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Durchmesser des Umkreises und Sinussatz

1. Radius $r = \overline{BM}$ verlängern zum Durchmesser $d = 2r = \overline{BD}$.
2. Dreieck ΔDCB einzeichnen. Dieses ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Punkt C (Satz des Thales).
3. In dem gleichschenkligen Dreieck ΔDMC gilt für den Winkel bei D:

$$\angle MDC = \frac{180° - \alpha''}{2}$$
$$= \frac{180° - (180° - 2\alpha)}{2}$$
$$= \frac{180° - 180° + 2\alpha}{2} = \alpha$$

und daraus folgt: $\sin\alpha = \dfrac{a}{2r}$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

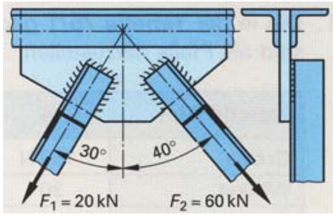
Zusatzaufgabe 2: Lösungen der Aufgaben mit dem Kosinus- und Sinussatz

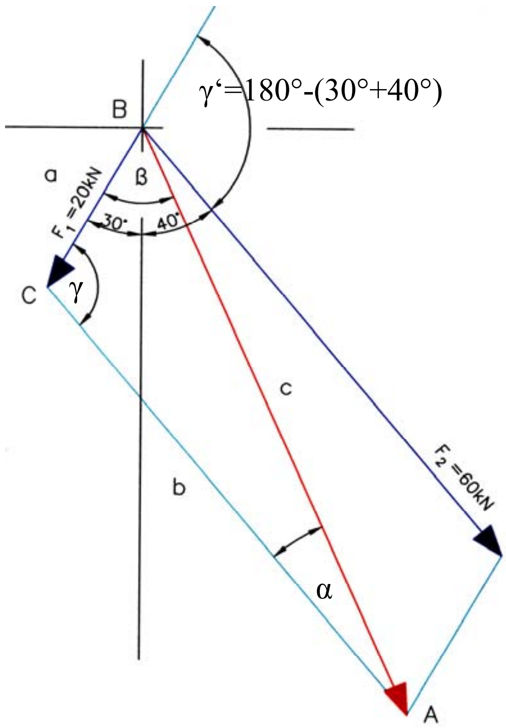
Technische Mathematik für Metallberufe – Lehr- und Übungsbuch; Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel; 2005, 4. Aufl., ISBN 3-8085-1174-5

S. 76, Aufg. 8

An einem Knotenblech greifen die Kräfte F_1 und F_2 an.

a) Welche resultierende Gesamtkraft F_r üben die zwei Kräfte auf das Knotenblech aus?
b) Welchen Winkel bildet die Resultierende mit der Senkrechten?





a) Berechnung der resultierenden Kraft F_r mit dem Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Es gilt γ = γ'

(Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)

Ferner entspricht:
$a = F_1$
$b = F_2$ und
$c = F_r$

$$\begin{aligned} F_r &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma} \\ &= \sqrt{(20kN)^2 + (60kN)^2 - 2 \cdot 20kN \cdot 60kN \cdot \cos 110°} \\ &= 69{,}432329...kN \\ &\approx \underline{\underline{69{,}43kN}} \end{aligned}$$

b) Berechnung des Winkels zwischen der Senkrechten und der resultierenden Kraft

Mit Hilfe des Sinussatzes wird der Winkel β berechnet:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{c} \cdot b = \frac{b}{c} \cdot \sin\gamma$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c} \cdot \sin\gamma\right) = \arcsin\left(\frac{F_2}{F_r} \cdot \sin\gamma\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{60kN}{69{,}432329...kN} \cdot \sin 110°\right) \approx 54{,}30°$$

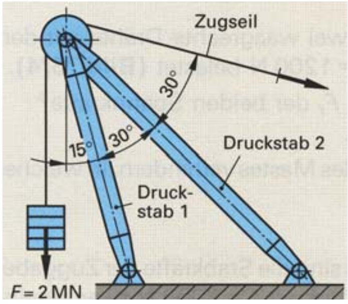
Der gesuchte Winkel beträgt β' = 54,30° - 30° = 24,30°.

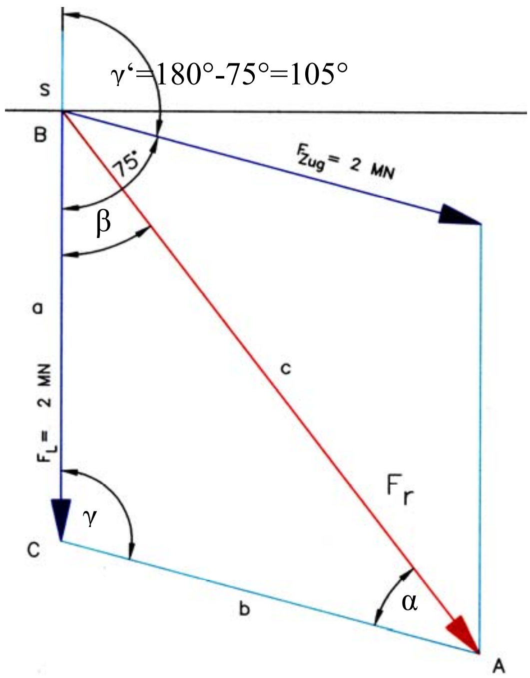
Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Technische Mathematik für Metallberufe – Lehr- und Übungsbuch; Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel; 2005, 4. Aufl., ISBN 3-8085-1174-5

S. 76, Aufg. 11

Welche Kräfte entstehen in den Druckstäben1 und 2, wenn der Kran eine Last F = 2 MN hebt?





a) Berechnung der resultierenden Kraft F_r mit dem Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Es gilt γ = γ'

(Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)

Ferner entspricht:
$a = F_L$
$b = F_{Zug}$ und
$c = F_r$

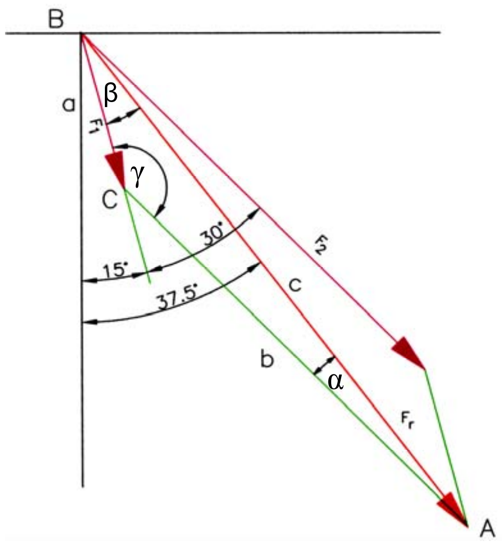
$$\begin{aligned} F_r &= \sqrt{F_L^2 + F_{Zug}^2 - 2 \cdot F_L \cdot F_{Zug} \cdot \cos\gamma} \\ &= \sqrt{(2\,MN)^2 + (2\,MN)^2 - 2 \cdot 2\,MN \cdot 6\,MN \cdot \cos 105°} \\ &= 3{,}173413...\,MN \\ &\approx \underline{\underline{3{,}173\,MN}} \end{aligned}$$

b) Berechnung des Winkels der resultierenden Kraft zur Senkrechten

Das ΔABC ist ein gleichschenkliges Dreieck (a = b). Daraus folgt, dass die Winkel α und β gleich groß sind (Basiswinkel).

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ &= \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{180° - 105°}{2} \\ &= \underline{\underline{37{,}5°}} \end{aligned}$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de



c) Zerlegung der resultierenden Kraft F_r in die Kräfte F_1 und F_2, die in die Druckstäbe wirken

Für das Dreieck ΔABC gilt:

a = F_1 (Druckstab 1)
b = F_2 (Druckstab 2)
c = Resultierende F_r

$\beta = 37{,}5° - 15° = 22{,}5°$
$\gamma = 180° - 30° = 150°$
$\alpha = 180° - (150° + 22{,}5°) = 7{,}5°$

Da wir die drei Winkel des Dreiecks und eine Seite kennen, lassen sich die fehlenden Seiten mit dem Sinussatz berechnen:

c1) Seite a = F_1

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$F_1 = \frac{F_r \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$= 3{,}173\ MN \cdot \frac{\sin 7{,}5°}{\sin 150°}$$

$$\underline{\underline{\approx 0{,}828\ MN}}$$

c2) Seite b = F_2

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$F_2 = \frac{F_r \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$= 3{,}173\ MN \cdot \frac{\sin 22{,}5°}{\sin 150°}$$

$$\underline{\underline{\approx 2{,}429\ MN}}$$